

Aplicación del método de los elementos finitos al cálculo de capacidades

Jose-M. Bueno-Barrachina ¹, César-S. Cañas-Peñuelas ¹, S. Catalan-Izquierdo ¹ y Francisco Cavallé-Sesé ¹

¹ Instituto de Tecnología Eléctrica
Universidad Politécnica de Valencia

Edificio 5E, Tercera Planta
Camino de Vera s/n 46022 Valencia (España)
phone:+34 96 3877593, fax:+34 963877599

e-mail: jmanuel.bueno@ite.es, cscanas@ite.upv.es, scatalan@ite.upv.es, fcavalle@ite.upv.es

RESUMEN

En este trabajo se calcula mediante la aplicación del método de los elementos finitos, la capacitancia de un cubo de longitud unitaria y la capacidad de un condensador cilíndrico, teniendo en cuenta la influencia de los parámetros geométricos y del medio que rodea a los conductores. Los resultados obtenidos se han comparado con otros previamente publicados.

Key words: Modelos, Campo Eléctrico, Capacidad, Capacitancia, Método de los Elementos Finitos, Efecto Borde.

1. Introduction

La mayoría de la aparamenta de protección utilizada en el campo de la Ingeniería Eléctrica, presenta angularidades (esquinas, aristas, etc.) que en presencia de un campo eléctrico importante, tienden a concentrar la carga electrostática. Las zonas que presentan estas angularidades tienen una mayor probabilidad de sufrir los efectos de una descarga electrostática.

El estudio, desde el punto de vista electrostático, de una angularidad, presenta una singularidad ya que las ecuaciones de continuidad no son aplicables.

El cálculo la carga existente en dichas singularidades, ha generado numerosos estudios y ecuaciones [1-5]. Gracias al desarrollo de los métodos matemáticos modernos, las ecuaciones generadas y que describen el comportamiento de las singularidades, han sido implementadas en numerosos algoritmos iterativos, como el random walk [6-8], el first-passage [9], el last-passage [10], el last-passage Monte Carlo [11;12], etc [6;13-15]. El problema fundamental de todos estos algoritmos, es que están diseñados para una geometría tipo, así que cualquier variación geométrica no prevista por el algoritmo, hace que el método no converja y por lo tanto el método deja de ser valido y ha de ser adaptado. Esto genera la necesidad de utilizar algoritmos de cálculo genéricos que

puedan ser utilizados en entornos comerciales, con el fin de aumentar la flexibilidad de las herramientas desde el punto de vista ingenieril.

El objetivo de este trabajo, es calcular la capacidad de geometrías simples mediante el método de los elementos finitos (FEM), para así ver la influencia del efecto de los bordes (“edge-effect”) sobre la capacidad total.

La primera geometría a analizar, es un cubo unitario (la longitud de las aristas es un metro). Se comienza utilizando una geometría simple ya que se tienen numerosos resultados de otros autores, así se valida el tamaño de malla y el algoritmo de cálculo.

La segunda geometría a analizar está formada por dos placas conductoras concéntricas, que forman un condensador cilíndrico de anchura y espesor variable. Con este modelo se justificará el empleo del método de los elementos finitos para resolver las singularidades de cualquier geometría.

2. Modelos

Los dos modelos se han desarrollado en el programa comercial ANSYS[®], ya que este permite incluir nuestro propio algoritmo de calculo para solucionar el modelo.

A. Modelo del cubo unitario

Hemos optado por modelar en primer lugar el cubo unitario [16], ya que es la geometría típica para validar la aplicación de un nuevo algoritmo de cálculo, que resuelva el problema electrostático que supone el efecto del borde.

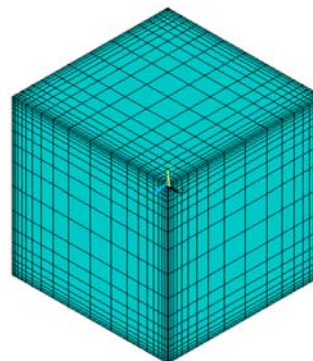


Fig 1. Mallado utilizado en el modelo del cubo unitario [16].

B. Modelo del condensador cilíndrico

En el campo de la Ingeniería Eléctrica, se pueden encontrar condensadores cilíndricos en multitud de aparata de alta tensión, como por ejemplo los condensadores cilíndricos que se generan durante la maniobra de los interruptores de las subestaciones. Esto supone un buen argumento para ver el funcionamiento del algoritmo de cálculo implementado aplicado a este tipo de geometrías (Ver Fig. 2).

En este caso el algoritmo de cálculo empleado para calcular la capacidad total, tiene en consideración la variación de los parámetros geométricos del condensador cilíndrico formado por dos conductores concéntricos.

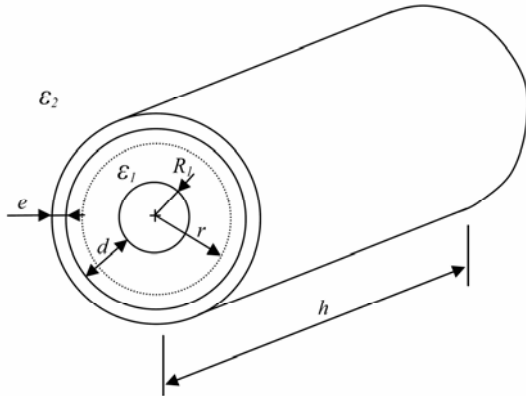


Fig. 2. Modelo geométrico del condensador cilíndrico. De donde: e es el espesor del conductor exterior, d es la distancia entre los conductores, h es el largo de los conductores, R_1 es el radio del conductor interno, ϵ_1 es la permitividad dieléctrica relativa del medio dieléctrico entre los conductores, y ϵ_2 es la permitividad dieléctrica relativa del medio dieléctrico que rodea el sistema.

Para que quede patente la influencia del efecto del borde en un condensador cilíndrico, se simula el modelo generado considerando y sin considerar el efecto del borde de los conductores que conforman esta geometría. En la siguiente figura se ve el modelo utilizado para el caso de que el condensador fuera ideal, esto es, no se considera el efecto del borde ni el efecto del medio dieléctrico que rodea al sistema.

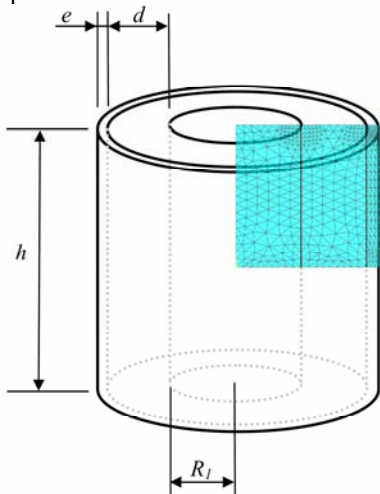


Fig. 3. Modelo geométrico del condensador cilíndrico ideal. En este modelo se prescinde del medio que rodea al sistema, por lo que el algoritmo de cálculo no tendrá en cuenta el efecto del borde de los conductores que constituyen el citado sistema.

Viendo la fig. 3, se comprende enseguida que en una aplicación real, hay que tener en cuenta el medio que rodea al sistema y por lo tanto la influencia del efecto de los bordes de los conductores que lo constituyen. El modelo que se propone en este trabajo y que tiene en consideración la influencia del medio que rodea al sistema y de los bordes de los conductores que lo constituyen, se puede ver en la fig. 4.

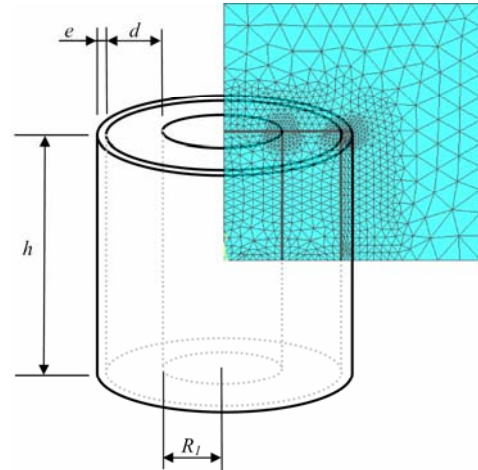


Fig. 4. Modelo geométrico del condensador cilíndrico real. En este modelo se tiene en cuenta del medio que rodea al sistema, por lo que el algoritmo de cálculo considera el efecto del borde de los conductores que constituyen el citado sistema.

B.1. Capacidad teórica de un condensador cilíndrico

La capacidad teórica de un condensador cilíndrico [17;18] de longitud h finita, pero lo suficientemente grande respecto del del radio R_1 y del espesor del medio dieléctrico ϵ_1 entre los conductores d , ver fig 1, satisface la ecuación (1). Esta ecuación es válida si se desprecia el efecto del borde [19] de los conductores que conforman el sistema, es decir, si se tiene en cuenta el modelo mostrado en la fig. 3.

$$C_{ideal} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_1 \cdot h}{\ln \left(1 + \frac{d}{R_1} \right)} \quad (1)$$

En la ecuación (1) se muestra que la capacidad de este tipo de condensadores, es inversamente proporcional al logaritmo natural de la distancia entre los conductores d que constituyen el condensador y es directamente proporcional a la longitud del condensador h . Gráficamente, la evolución de la capacidad en función de los parámetros geométricos del condensador, puede verse en la fig. 5. Esta figura se han obtenido variado los parámetros R_1 , d y h . Estos valores se muestran en la TABLA 1.

En la fig. 5, se aprecia el efecto asintótico de la función logaritmo para valores de $1+d/R_1$ menores de la unidad. Este hecho hace que el intervalo de valores entre 1 y 2, sea la zona donde mayor es el ratio capacidad frente a pequeños cambios en las variables geométricas. Por lo que los resultados obtenidos en este trabajo se centran en

esta zona (ver la Fig. 6), ya que nos parece la más interesante.

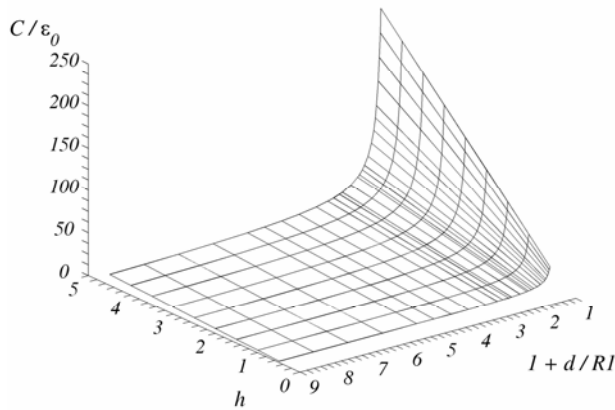


Fig. 5. Capacidad de un condensador cilíndrico ideal.

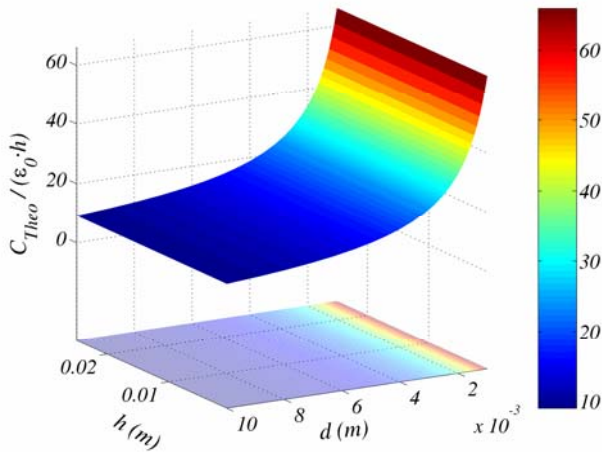


Fig. 6. Capacidad de un condensador cilíndrico ideal en la región investigada.

TABLA 1: Valores de las variables geométricas

R_l (m)		d (m)		h (m)	
min	max	min	max	min	max
0.5	4.5	0.5	4.5	1.12	9.0

3. Resultados

A. Modelo del cubo unitario

Con el primer modelo, se ha obtenido la capacitancia de un cubo unitario ($0.66067 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0$). Si comparamos este resultado con los de otros autores [9;20-23], se demuestra que el algoritmo de cálculo utilizado es válido y que además el estimador de error funciona muy bien, ya que el error cometido es realmente bajo.

Con el primer resultado obtenido, se ha validado el método y además se conoce la relación óptima entre el tamaño de la malla y la longitud de la arista. Con estos datos se procede a mallar el segundo modelo y posteriormente se le aplica el algoritmo de cálculo desarrollado.

B. Modelo del condensador cilíndrico ideal

En esta sección se calcula la capacidad de un condensador cilíndrico mediante el uso de un modelo basado en FEM. Gracias a este cálculo se valida el modelo y se obtiene un indicador del error que se comete al no tener en cuenta el efecto del borde de los conductores que conforman el condensador y del medio que rodea a este.

El uso de un modelo reducido, disminuye el número de nodos que forman parte del cálculo y por lo tanto, el disminuye el tiempo de cálculo, pero un mallado demasiado grande aumenta el error cometido, por esto se utilizó previamente el modelo del cubo unitario, así se tienen los ratios óptimos para este nuevo modelo.

Para este caso se ha utilizado un modelo axisimétrico 2D, este tipo de modelos es adecuado para geometrías de revolución, como es nuestro caso.

Por otra parte, el indicador del error que se comete por el algoritmo de cálculo utilizado queda definido por la ecuación (2).

$$Error(\%) = \left(\frac{C_{simulación}}{C_{teórica}} - 1 \right) \cdot 100 \quad (2)$$

Tras la simulación, el error obtenido se encuentra entre el 0,0028% y el 0,0015%. La magnitud de este error permite asumir que el algoritmo de cálculo utilizado basado en FEM es correcto y por lo tanto queda validado. En la siguiente figura se muestra la distribución del campo eléctrico obtenido en un submodelo simulado del condensador ideal, es decir, el condensador que no tiene en cuenta el medio que rodea el sistema ni el efecto de los bordes de los conductores que constituyen el condensador. Como se puede apreciar, las distribuciones del campo eléctrico no muestran ninguna deformación o singularidad en su trayectoria radial entre las placas del condensador.

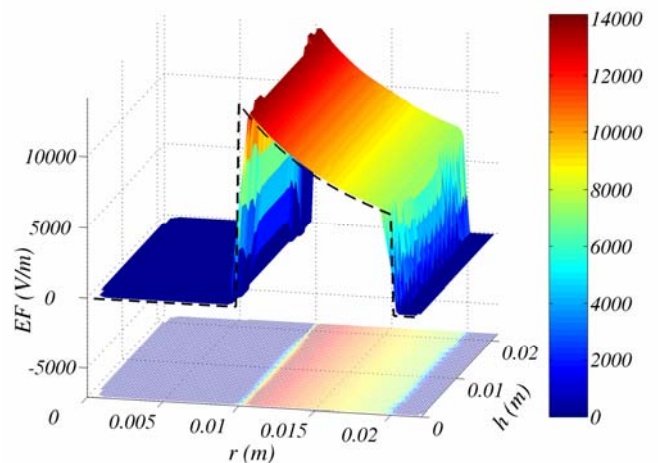


Fig. 7. Distribución del campo eléctrico en el medio dieléctrico existente entre los conductores que conforman un condensador cilíndrico de: $R_l = 0.01$ m, $d = 0.01$ m, $\epsilon = 2 \text{ E-}3$ m y $h = 0.044$ m..

C. Modelo del condensador cilíndrico real

La capacidad de un condensador real [13;14] es la suma de la capacidad interna (C_{in}) y de la capacidad externa (C_{out}) (ver ecuación (3)), ya que las líneas de campo eléctrico también se cierran por el medio dieléctrico que rodea al condensador[3;5;16;24;25].

$$C = C_{in} + C_{out} \quad (3)$$

La capacidad interna es la capacidad entre las armaduras que conforman el condensador, y generalmente se le asigna el valor de la capacidad de un condensador ideal que viene definida por la ecuación (1). Por otra parte, la capacidad externa es la capacidad que aparece en el exterior del condensador, debida a la deformación de las líneas de campo eléctrico. Esta deformación es función de la permitividad del medio dieléctrico y del efecto de los bordes de los conductores que conforman el condensador.

Con el objetivo de calcular, con exactitud, el valor de la capacidad de un condensador cilíndrico real, se validó anteriormente el modelo utilizado para el cálculo de la capacidad de un condensador ideal, así que partiendo del modelo utilizado para el condensador ideal (ver fig. 3), se ha añadido el área de medio dieléctrico que rodea el condensador, obteniendo así el modelo representado en la fig. 4.

La capacidad calculada utilizando el modelo del condensador real, se pueden ver en la siguiente figura.

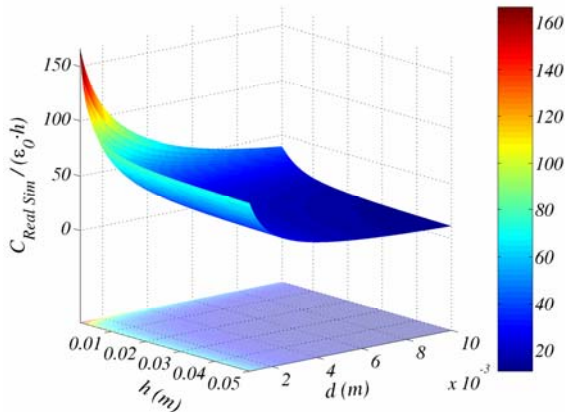


Fig. 8. Capacidad del condensador real modelado en unidades ($1/\text{longitud} \cdot \epsilon_0$) en función de las variables geométricas.

En la fig. 9 se ve en forma de ratio, la diferencia entre la capacidad teórica o ideal y la capacidad obtenida con el modelo del condensador. En esta figura se demuestra que el error es inversamente proporcional a la longitud de los conductores que constituyen el condensador y directamente proporcional al espacio existente entre ellos.

Este resultado se podía prever ya que el uso de la ecuación de la capacidad ideal queda restringido, ya que empíricamente se sabe que en las condiciones indicadas la ecuación de la capacidad ideal no es adecuada, justamente al efecto de los bordes de las armaduras y de la existencia de un medio dieléctrico externo.

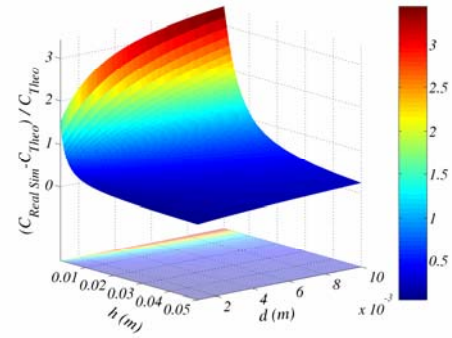


Fig. 9. Ratio de error entre la capacidad teórica o ideal y la capacidad obtenida de simular un modelo del condensador real.

En la siguiente figura, se puede apreciar la magnitud de la singularidad generada por el efecto del borde de los conductores.

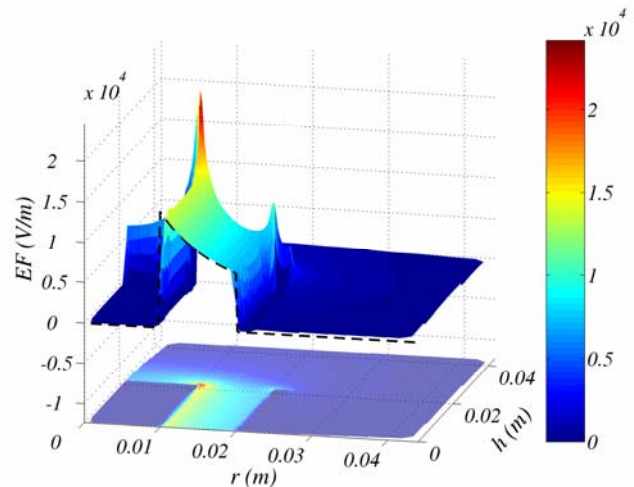


Fig. 10. Distribución de campo eléctrico en el modelo de condensador real utilizado (la línea discontinua se ha calculado mediante la ecuación (1)), para $R_l = 0.01$ m, $d = 0.01$ m, $e = 2 \text{ E-}3$ m y $h = 0.044$ m..

Un resultado importante de este trabajo es ver como va cambiando la dirección de las líneas de campo en función de la permitividad dieléctrica del medio que rodea al sistema, esto se puede ver en la fig. 10. En esta figura se aprecia la dirección de las líneas de campo y como estas se concentran alrededor de los vórtices generados por los bordes de los conductores que conforman el condensador.

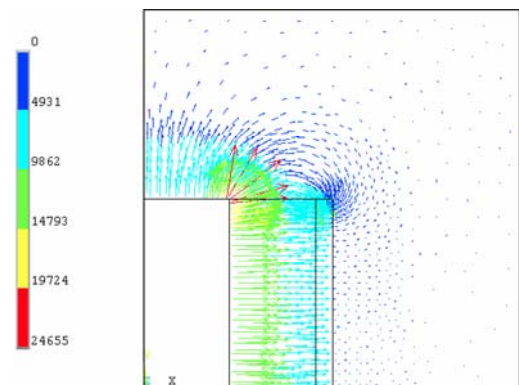


Fig. 11. Distribución de las líneas de campo eléctrico en el modelo de condensador real utilizado, para $R_l = 0.01$ m, $d = 0.01$ m, $e = 2 \text{ E-}3$ m y $h = 0.044$ m..

Para cuantificar el valor de la capacidad de un condensador real en la zona estudiada en este trabajo, se han generado y calculado 9261 modelos de diferentes dimensiones. Los resultados obtenidos se han tratado estadísticamente para obtener la expresión matemática, que es la que menor error comete, respecto de los valores de la capacidad obtenida.

$$\frac{C_{fitting}}{\varepsilon_0} = (k_1 \cdot h^2 + k_2 \cdot h)^{\frac{1}{2}} \cdot d^{k_3} \quad (4)$$

De donde $k_1 = 0.622088$, $k_2 = 0.00546281$, $k_3 = 0.615925$ y ε_0 es la permitividad dieléctrica relativa del medio, en este caso el aire. Con esta expresión se obtiene un ajuste R-Squared = 98.97%.

4. Conclusion

En este trabajo se demuestra la validez del FEM para calcular la capacidad de cualquier sistema eléctrico.

El modelo presentado incluye también las características del medio que rodea al material conductor y además tiene en cuenta el efecto de los bordes de este en la distribución del campo eléctrico.

Los modelos propuestos basados en FEM, no solo son válidos para calcular la capacidad, ya que también obtienen la distribución superficial de carga en los conductores. Gracias a la flexibilidad que ofrece utilizar un programa comercial que integra FEM, el algoritmo de cálculo utilizado es aplicable a cualquier geometría, lo que permite abordar sistemas geométricos complejos y populares como son los problemas de la ingeniería eléctrica.

Referencias

- [1] R.Bansevicus, J.A.Virbalis. Distribution of electric field in the round hole of plane capacitor, *J. Electrostat.* 64 (2006) 226-233.
- [2] R.Bansevicus, J.A.Virbalis. Two-dimensional Braille readers based on electrorheological fluid valves controlled by electric field, *Mechatronics* 17 (2007) 570-577.
- [3] Y.Xiang. The electrostatic capacitance of an inclined plate capacitor, *J. Electrostat.* 64 (2006) 29-34.
- [4] Y.Xiang. Non-linear oscillation of the fluid in a plate capacitor, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Sim.* 12 (2007) 652-662.
- [5] Y.Xiang. Further study on electrostatic capacitance of an inclined plate capacitor, *J. Electrostat.* 66 (2008) 366-368.
- [6] C.O.Hwang. Extrapolation technique in the "walk on spheres" method for the capacitance of a unit cube, *J. Korean. Phys. Soc.* 44 (2004) 469-470.
- [7] M.Mascagni, N.A.Simonov. The random walk on the boundary method for calculating capacitance, *J. Comput. Phys.* 195 (2004) 465-473.
- [8] H.J.Wintle. The capacitance of the cube and square plate by random walk methods, *J. Electrostat.* 62 (2004) 51-62.
- [9] J.A.Given, J.B.Hubbard, J.F.Douglas. A first-passage algorithm for the hydrodynamic friction and diffusion-limited reaction rate of macromolecules, *J. Chem. Phys.* 106 (1997) 3761-3771.
- [10] C.O.Hwang, T.Won. Last-passage algorithms for corner charge singularity of conductors, *J. Korean. Phys. Soc.* 47 (2005) S464-S466.
- [11] J.A.Given, C.O.Hwang, M.Mascagni. First- and last-passage Monte Carlo algorithms for the charge density distribution on a conducting surface, *Phys. Rev. E.* 66 (2002) 056704-056708.
- [12] C.O.Hwang, J.A.Given. Last-passage Monte Carlo algorithm for mutual capacitance, *Phys. Rev. E.* 74 (2006) 027701-027703.
- [13] C.J.Bouwkamp. A simple method of calculating electrostatic capacity, *Physica* 24 (1958) 538-542.
- [14] S.Ghosh, A.Chakrabarty. Estimation of capacitance of different conducting bodies by the method of rectangular subareas, *J. Electrostat.* 66 (2008) 142-146.
- [15] D.Halverson, G.Friedman, I.Tsukerman. Local approximation matching for open boundary problems, *IEEE Trans. on Mag.* 40 (2004) 2152-2154.
- [16] C.-S. Cañas-Peñuelas, S. Catalan-Izquierdo, J.-M. Bueno-Barrachina, and F. Cavallé-Sesé, Unit cube capacitance calculation by means of finite element analysis, in: *ICREPQ'09, Valencia, (2009)*.
- [17] V.Cooray. Charge and voltage characteristics of corona discharges in a coaxial geometry, *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* 7 (2000) 734-743.
- [18] J.L.Manglano de Mas. *Lecciones de Física, Artes Gráficas Soler S.A., Valencia, 1995.*
- [19] J.A.Given, C.O.Hwang. Edge distribution method for solving elliptic boundary value problems with boundary singularities, *Phys. Rev. E.* 68 (2003) 046128-6.
- [20] C.S.Brown. Capacity of the regular polyhedra, *Comput. Math. Appl.* 20 (1990) 43-56.
- [21] E.Goto, Y.Shi, N.Yoshida. Extrapolated surface charge method for capacity calculation of polygons and polyhedra, *J. Comput. Phys.* 100 (1992) 105-115.
- [22] C.O.Hwang, M.Mascagni. Electrical capacitance of the unit cube, *J. Appl. Phys.* 95 (2004) 3798-3802.
- [23] F.H.Read. Capacitances and singularities of the unit triangle, square, tetrahedron and cube, *Compl.* 23 (2004) 572-578.
- [24] J.-M. Bueno-Barrachina, C.-S. Cañas-Peñuelas, S. Catalan-Izquierdo, and F. Cavallé-Sesé, Capacitance evaluation on perpendicular plate capacitors by means of finite element analysis, in: *ICREPQ'09, Valencia, (2009)*.
- [25] S. Catalan-Izquierdo, J.-M. Bueno-Barrachina, C.-S. Cañas-Peñuelas, and F. Cavallé-Sesé, Capacitance evaluation on parallel-plate capacitors by means of finite element analysis, in: *ICREPQ'09, Valencia, (2009)*.